VaR제약 시 우체국금융의 최적자산배분에 관한 연구

이 홍 재

경희대학교 경영연구소 선임연구원

우체국 금융의 자산운용은 사실상 최적자산배분에 앞서 유동성 리스크와 금리 리스크 관리를 통한 ALM관리에 초점이 맞추어져 왔다. 그러나 최근 바젤협정과 관련하여 시장 리스크가 요구자기자본에 중요한 영향을 미치는 한 요인이 되었으며 이는 곧 금융기관의 수익성에 직접적인 영향을 미치므로 시장 리스크를 고려한 최적자산배분의 문제는 유동성 리스크 관리 이상으로 중요하다.

본 연구는 우체국 금융 또한 VaR를 제약한 최적자산배분을 고려해야 한다는 관점에서 VaR의 산출방법 및 공리를 설명하고 가장 큰 한계점인 subadditivity와 convexity를 만족하는 VaR제약 하에서의 최적자산배분 모형을 제시함으로써 향후 우체국 금융에 이를 적용할 수 있는 방안을 제시하고자 한다.

Ⅰ. 서 론

금융기관은 포트폴리오를 구성할 때 위험－수익의 상반(trade-off)관계와 미래의 가격변동에 의한 예상손실(EL)과 비예상손실(UL)규모의 정확한 측정을 통해 규제자본(required capital)을 관리하고 ALM 관리에 의한 NII(또는 risk adjusted return on capital: RAROC)의 극대화를 도모한다.

우리나라 금융기관들의 자금조달 및 포트폴리오 운용에 대한 특성은 조달금리의 만기는 길고 운용금리의 만기는 짧은 자산구조로서 유동성 GAP이 대체로 정(+)의 GAP인 금리자산민감형이며 우체국 금융 또한 그러하다. 우체국 금융의 RSA와 RSL은 확정 금리부 상품과 실적배당 상품, 그리고 보험상품과 예금상품으로 구분된다. 이 때 RSA는 시장금리가 변할 때 자산의 계약금리가 변하며 일정기간 내에 만기가 도래하는 자산이나 또는 repricing되는 자산과 변동금

리로 운용되는 자산으로서 우대금리(prime rate) 대출, 단기 유가증권, 그리고 관리기간 내에 재매도되는 유가증권 등을 의미하며, RSL은 시장금리가 변할 때 부채의 계약금리가 변하는 것으로 일정기간 내에 만기가 도래하는 부채나 repricing 부채와 변동금리로 조달되는 부채로서 변동금리 또는 관리기간 내에 만기가 도래하는 수신상품으로 CD, 유로달러, 예수금, 단기성차입금, 콜론, RP 등을 의미한다.

우체국 금융의 Funding GAP을 계산할 때 장부가치의 RSA에서 RSL을 차감한 값으로 하고 타 금융기관과의 비교를 위해 금리민감 GAP비율(즉, RSA/RSL)과 상대적 GAP비율(GAP/총자산)을 계산 한 다음 1.0과 차이가 나면서 그 크기가 클수록 NII가 금리변화에 민감하므로 GAP위험에 노출되었다고 분석한다.

본 연구에서 금융기관의 포트폴리오는 최적자산배분과 함께 유동성 리스크가 사후적으로 면역화 된다는 가정을 한다. 이는 각 만기별 금리민감자산(RSA)과 금리민감부채(RSL)의 차이인 GAP을 총자산으로 나누어준 GAP ratio가 최소화 되고 각 만기별 Repricing Gap(즉, △NII)을 자기자본 총액으로 나눈 리스크 노출비율(exposure ratio)이 최소화 된 가운데 가중평균만기(WAM 또는 Duration)를 이용한 immunization이 사후적으로 만족되었다는 것을 의미한다. 따라서 포트폴리오에 대한 유동성 위험은 제거될 수 있는 것으로 가정한다. 이 같은 가정하에서 포트폴리오의 최적자산배분의 문제는 순전히 금융기관들이 시장 VaR를 제약하는 가운데 기대수익을 극대화하는 포트폴리오 최적화이다.

본 연구의 목적은 위험 최소화 및 기대수익 극대화 속에서 VaR-Frontier 상의 우체국 금융 포트폴리오의 최적자산배분비율을 산출하는 모형을 제시하는 데 있다. 따라서 각각의 모형에 의해서 산출된 VaR를 최대손실액으로 한정하고 각 신뢰수준(95~99%)에 의한 최적자산배분비율과 최소분산 포트폴리오(MVP), 그리고 최적자산배분점을 결정한 다음 VaR-프론티어를 제시하는 것이 가능하다.

VaR계산 시 두 가지 이상의 자산으로 구성된 포트폴리오에 나타날 수 있는 하부가법성(sub-additivity) 문제의 해결을 위해 분산-공분산 역행렬과 라그랑지안 함수, 그리고 위험회피도를 이용하여 전체 포트폴리오의 비체계적 위험에 대한 분산투자효과를 반영한다. 따라서 $\rho(A+B) \leq \rho(A)+\rho(B)$의 조건을 만족하면서 직접적인 위험회피도를 고려한 최적자산배분비율을 도출한다. 이렇게 산출된 최적자산비율에 의한 리스크-리턴의 VaR-프론티어는 concave를 나타내

보여 convexity 특성을 만족한다.

본 연구의 구성은 제1장 서론에 이어 제2장에서는 VaR와 최적자산배분에 관한 선행연구를 기술하고 제3장에서는 VaR측정방법 및 공리를 설명하였다. 제4장에서는 VaR를 이용한 최적 포트폴리오 계산모형을 제시하고 제5장에서는 결론을 맺고 우체국 금융에의 적용방안을 간략히 서술하였다.

Ⅱ. VaR 및 최적자산배분과 관련된 선행연구

VaR의 연구는 도입초기에 BIS에서 요구하고 있는 적정보유자본금의 결정과 자산운용의 한도설정에 주로 활용되어왔으나 최근에는 시장리스크 관리와 금융시장의 효율성을 높이는 데 크게 기여하고 있다. 그러나 이 같은 VaR의 유용성에도 불구하고 VaR를 사용하는 데 따른 가장 큰 한계점은 subadditivity와 convexity 등의 문제이다. 이 같은 문제를 단순히 통계적으로 해결하는 방법은 극단치이론(EVT)을 이용한 VaR를 구하는 것이며 또 다른 대안은 분석에 사용되는 관측표본의 수를 늘리는 것이다. 이 경우 subadditivity의 문제는 해결되지만 여전히 convexity의 문제는 해결되지 않고 남게 된다(Artzner et al., 1999).

금융기관은 포트폴리오 구성을 통해 위험을 분산시키고 VaR를 제약하면서 포트폴리오 구성자산의 기대수익을 극대화하는 최적자산배분방법에 큰 관심을 갖는다. 이와 관련된 연구로 Clarke et al(2002)은 가장 좋은 포트폴리오 투자전략으로 체계적 위험(systematic risk)과 리스크 관리자의 리스크 허용행태에 따른 적극적 위험(active risk)을 동시에 고려하는 리스크 배분이 투자자로 하여금 포트폴리오의 리스크-수익을 더욱 더 효율적으로 개선하는 것이라고 주장하였다. 또한 Smithson(2001)은 자산배분 전략은 포트폴리오 기대 수익률에 중점을 두고 있고 리스크 배분전략은 설정된 리스크 하에서 기대수익율에 중점을 두고 있으므로, 자산배분은 리스크 변화를 고려하여 초기의 자산배분을 유지하며 리스크 배분은 리스크 변화에 따라 즉각적으로 자산을 재배분(reallocation)함으로써 하방위험을 통제한다고 설명하고 있다.

Mausser & Rosen(1998)은 Delta-Normal방법과 시뮬레이션방법을 사용하여 VaR를 최소화하는 자산포지션 크기를 계산하면서 이 방법들은 비선형적 분포를 가진 자산 수익률의 계산에 유리하다고 설명하고 있다. 또한 Lucas & Klassen(1998)의 연구결과에 따르면 세 가지 자

산을 이용한 포트폴리오의 구성과 포트폴리오의 목적함수는 기대수익률을 극대화하는 최적자산 배분 시 두꺼운 꼬리측정의 중요성을 강조하고 있다.

Huisman et al(1999)은 포트폴리오의 자산배분에서 정규분포를 가정한 경우 신뢰수준에 무관하게 동일한 자산배분 결과를 도출하였으며 역사적 분포방법에 의한 비모수적 분석결과는 최적포트폴리오 자산구성이 신뢰수준의 변화에 따라 달라진다는 것을 보여주고 있다. Campbell et al(2001)은 최대 손실을 VaR로 제한하면서 기대수익을 극대화시키는 포트폴리오 자산배분을 설명하면서 샤프(Sharpe)의 성과지수인 위험조정수익률에 포트폴리오 VaR를 이용하여 모수적 분포와 비모수적 분포의 두 가지 가정 하에서 최적포트폴리오를 도출하였다. 한편 Bensalah (2002)는 극단치이론(EVT)을 이용하여 최대한의 리스크를 회피하려는 기관(중앙은행 등)의 자산배분문제를 연구하였으며 분석방법은 Delta-Normal 방법과 역사적 분포 하에서의 VaR, 극단치 VaR를 이용하여 꼬리가 두꺼운(fat-tailed) 분포의 경우에 극단치이론의 적용이 설득력이 있다는 것을 설명하였다. 이와 관련된 국내의 연구에서 이준행(2000)은 KOSPI 지수와 10개의 종목으로 구성된 2개의 포트폴리오 등 총 3개의 포트폴리오를 이용한 일별 VaR를 계산하고 Delta-Normal 방법과 역사적 시뮬레이션 방법을 사용하였다. Delta-Normal 분석 시 변동성 추정 방법은 단순이동 평균법과 EWMA모형을 이용하였다. 김진호(2002)는 채권과 주식의 두 가지 자산을 이용하여 모수적 방법과 비모수적 방법에 의한 VaR를 구하고 샤프의 위험조정자본수익률(risk adjusted return on capital)을 사용한 최적포트폴리오를 산출하고 있으며, 박재석(2003)은 국고채 금리, KOSPI 200지수, 그리고 KOSPI 200지수선물 등으로 구성된 포트폴리오를 이용하여 Delta-Normal 방법과 역사적 시뮬레이션 방법에 의한 VaR 값 및 최적자산배분비율을 산출하였다.

이와 같이 선행연구에서는 각각의 가정된 분포에 따라 VaR를 산출하고 주어진 시장 리스크 하에서 최적자산배분에 대한 실증분석결과를 제시하고 있다. 이 같은 연구결과들을 기초로 본 연구에서는 포트폴리오 VaR를 산출하고 위험최소화 가정 하에서 기대수익률을 극대화하는 최적포트폴리오 모형을 제시하고자 한다.

Ⅲ. VaR 측정방법 및 공리(axioms)

VaR는 정상적인 시장여건에 대하여 주어진 신뢰수준에서 일정기간 동안 특정 자산 또는 포트폴리오를 보유함으로써 최악의 경우(worst case) 발생할 수 있는 최소손실금액(minimum loss)을 의미하며, 동등하게 최선(best case)의 경우 발생할 수 있는 최대손실금액(maximum loss)을 의미한다. 따라서 VaR는 위험자산의 보유기간과 신뢰수준의 함수이다.

1. VaR의 개념과 시장위험(Market VaR)의 계산

가. 선형모형에 의한 VaR의 계산

Asset-Normal(또는 RiskMetricsTM)방법은 선형적인 성과프로파일(pay-off profiles)을 나타내며 포트폴리오 수익률이 정규분포를 따른다는 가정을 하고 있다. 이는 다음 (식 1)과 같다.

$$VaR = z_{\alpha}\sigma_{p}\sqrt{\tau}, \quad \text{for } \sigma_{p} = \sqrt{\omega^{T}\Sigma\omega} \qquad \text{(식 1)}$$

여기서 z_{α}는 표준정규분포의 누적확률밀도함수의 값이 특정 유의수준일 때의 독립변수 값에 해당된다.

금융기관의 포트폴리오 VaR는 포트폴리오를 구성하는 개별 자산들의 VaR를 결합하여 측정되며 N개 자산으로 구성된 포트폴리오 수익률 R_p, ω', 그리고 개별자산의 기대 수익률을 나타내는 열벡터 R과 분산을 이용하여 구한다. 포트폴리오의 분산은 다음 (식 2)와 같은 행렬식으로 나타낼 수 있다.

$$\sigma_p^2 = [\ \omega_1\omega_2 \ldots \omega_N] \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & . & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & . & \sigma_{2N} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \sigma_{N3} & . & \sigma_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ . \\ . \\ \omega_N \end{pmatrix} \qquad \text{(식 2)}$$

위 식에서 포트폴리오 분산은 $\sigma_p^2 = w'\Sigma w$로 정의되며 Asset-Normal에 의한 포트폴리오 VaR는 (식 3)과 같다.

$$VaR_p = \alpha \times \sigma_p \times V_p = \alpha \times \sqrt{w' \Sigma w} \times V_p \qquad \text{(식 3)}$$

위 식에서 α는 특정 신뢰수준의 위험에 대한 승수이며, V_p는 포트폴리오의 가치이다. Delta-Normal 방법은 Asset-Normal 방법과 같은 가정을 따르며 다음 (식 4)와 같다.

$$VaR = z_\alpha \sigma_p \sqrt{\tau}, \quad \text{for } \sigma_p = \sqrt{\delta^T \Sigma \delta} \qquad \text{(식 4)}$$

Asset-Normal과 Delta-Normal의 방법은 단지 MPT(modern portfolio theory)에 의존하고 있다는 단순성(simplicity)이 장점인 반면, 수익률의 정규성(normality)을 가정하고 있는 것이 단점이다. 즉, 금융자산의 실제 수익률 분포가 두꺼운 꼬리분포를 따르며 비대칭적이라는 사실을 무시하고 있다. 또 다른 단점은 선형성(linearity)의 성과 프로파일을 가정하고 있으므로 위험-수익률 곡선의 convexity산출과 위치이동(local movement)을 허용하지 않는다는 점이다.

나. 비선형 모형(non-linear model)에 의한 VaR의 계산

VaR를 계산하는 또 다른 방법인 비선형 모형은 Delta-Gamma 방법, Factor-Push 방법, 수치탐색(numerical search) 방법 등이 있으며 Factor-Push 방법과 수치탐색(numerical search)방법은 많이 사용되지 않는 방법이다.

Delta-Gamma 방법은 시장수익률의 오차(innovation)에 대한 정규분포를 가정하고 있으며 성과 프로파일(pay-off profiles)이 위치모수와 2차(second-order)항에 의해서 추정되고 (식 5)와 같이 나타낼 수 있다.

$$VaR = Max\left[\delta^T \Delta P + \frac{1}{2} \Delta P^T \Sigma \Delta P\right], \qquad \text{여기서 } \Delta P^T \Sigma \Delta P \leq z^2 \qquad \text{(식 5)}$$

이 방법은 단순성과 2차항 효과를 포착(위치모수에 의한)할 수 있다는 것이 장점이며 수익률 분포의 fat-tail과 skewness 등을 무시한 가정과 공분산에 대한 예측이 가능하고 비위치(non-local)이동위험을 포착하지 않는다는 가정이 단점이다. 비선형 VaR에 대한 문제를 해결하기 위한 방법으로 Cornish-Fisher 확장모형을 사용한 VaR를 추정하는 것이 있는데, 이는 VaR의 계산에 왜도(skewness)의 결합을 허용하고 분포의 적률(moments)과 퍼센타일(percentiles) 간의 관련성을 허용하고 있다.

다. 시뮬레이션에 의한 VaR의 계산

VaR를 계산하는 세 번째 방법은 시뮬레이션 방법을 이용하는 것이다. 이 방법으로는 실증적 또는 역사적 시뮬레이션 방법과 Monte Carlo 시뮬레이션 방법 등이 있다. 실증적 또는 역사적 시뮬레이션 방법은 포트폴리오의 손익(P&L)을 역사적 시뮬레이션 수익률 분포에 기초하여 추정하는 것이며, Monte Carlo 시뮬레이션 방법은 포트폴리오의 손익(P&L)을 모형에 기초한 시뮬레이션 수익률 분포에 의해 추정하는 것이다.

이 방법은 위치(location)와 비위치(non-location) 가격변동 포착과 분포의 fat-tail과 왜도(skewness) 및 첨도(kurtosis)를 고려하고 있다는 것이 장점이다. 또한 Monte Carlo 시뮬레이션은 확률분포의 선택이 유연하며 역사적 시뮬레이션은 확률분포에 대한 추론을 요구하고 있지 않다는 것이 장점이다. 반면 이 방법은 계산비용이 많이 들며, Monte Carlo 시뮬레이션의 확률분포에 대한 선택이 요구되고 역사적 시뮬레이션은 확률분포를 선택할 수 없다는 것이 단점이다.

역사적 분포의 장점은 subadditivity의 공리를 만족하고 수익률에 대한 특정 확률분포를 가정하지 않으므로 모형위험이 없을 뿐 아니라 두터운 꼬리를 고려한 VaR계산이 가능하다. 그러나 과거자료에만 의존하므로 일시적인 변동성을 파악할 수 없고 표본의 크기가 작을 경우 오차가 커질 수 있으며 최근 자료를 과거자료와 동일시하는 문제점이 있다. 이에 대한 대안모형으로 EWMA 모형(exponential weighted movig average model)과 오차의 이분산성을 고려한 GARCH모형(generalized autoregressive heteroscedasticity model) 등 (Boudoukh, Richardson and Whitelaw, 1997; Alexander and Leigh, 1997)의 확률 변동성(stochastic volatility)방법이 사용된다. Nelson and Foster(1996)는 시변분산을 갖는 수익률이 조건적 정규분포를 보일 때 최적이 된다는 연구결과를 보여주고 있다. 한편 J.P. Morgan의 RiskMatrix™에서는 정규분포 분산의 ML추정치에 기초된 EWMA VaR를 산출하고 있다.

라. EVT VaR의 계산

최근까지 VaR의 측정방법은 리스크 관리의 표준으로 분포의 중앙에 초점을 두어 왔다. 그러나 1997년 10월의 한국금융시장의 위기나 아시아의 외환 금융위기와 같은 극단적 상황에 대한 연구는 금융기관들의 주요관심사로 등장하였고 자산수익률 분포의 꼬리부분에 집중하게 되었다. 물론 VaR 측정에 있어 정규분포의 가정은 중심극한정리에 의해 타당성을 갖는다. 그러나 정규분포를 가정하는 경우 높은 퀀타일의 리스크가 과대평가되고 금융시계열 자료에 존재하는

두터운 꼬리(fat-tail)분포를 설명하지 못한다. 이에 대한 대안이 바로 극단치(extreme value theory, EVT) VaR이다.

EVT VaR는 Longin(2000)과 Bensalah(2000)의 연구에서와 같이 예외적인 시장상황에서의 일정기간내의 최소기대손실의 측정과 VaR이 유용한 보완책이 될 수 있다. VaR는 만일 꼬리가 단조(monotonic)-즉 덩어리가 없는(without lumps)-라면 위험을 우측으로만 서열화한다. 반면 혹을 갖는 꼬리(lumpy tails)는 VaR의 잘못된 위험할당을 할 수 있다는 것을 의미한다. 이 같은 lumpy tail은 매우 변동성이 크거나 산재되어 있는 시장자료들에서 나타난다.

EVT추정은 두 가지 방법이 있다. 첫째, 블록 최대값 방법으로 전체자료를 같은 일수를 갖도록 하는 블록으로 나눈 후 각 블록 내에서 최대값을 추출하여 이 자료로 부터 VaR를 추정하는 일반화된 극단치 분포방법인 GEV방법이다. 둘째, 임계점(threshold point)을 초과하는 자료들을 따로 모아 이들을 대상으로 분석하는 방법이다. 이 방법에는 Hill estimator에 기초한 준모수적 방법과 일반화된 파레토 분포(pareto distribution)인 GPD에 기초한 모수적 방법이 있다. 극단치 이론이라 불리는 Fisher-Tippet정리로부터 극대값 M_n의 분포가 자료의 수가 증가하면 안정적인 극한 분포(limiting distribution)로 수렴한다.

2. VaR의 공리(axioms)

Artzner et al.(1999)은 위험의 coherent 측정(coherent measures of risk)에 대한 연구에서 위험의 측정시 만족되어야하는 공리집합(a set of axioms)의 중요한 속성들을 다음과 같이 제시하고 있다.

[공리 1]: 단조성(Monotonicity) 조건의 만족: 만일 $X \leq Y$이면, $\rho(X) \geq \rho(Y)$이다.

[공리 2]: 양정 동질성(Positive Homogeneity)조건의 만족: 만일 $\lambda \geq 0$이면, $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$이다.

[공리 3]: 평행이동불변(Translational Invariance)조건의 만족: $\rho(X+a) = \rho(X) - a$이다.

[공리 4]: 하부가법성(Subadditivity) 조건의 만족: $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$이다.

불행하게도 일반적인 계산방법에 의한 VaR는 subadditivity의 공리를 위배하고 있으며 coherent되지 않는다. 즉 위험분산원칙을 위배(즉 (VaR=2)+(VaR=3)=(VaR=8))하고 있

다. 따라서 금융기관을 위해 적합한 위험측정방법이 아니라고 볼 수도 있다. 사실상 모든 VaR 문제의 원천은 꼬리부분을 소홀히 다루기 때문에 발생한다. 이를 해결하기 위한 방법은 subadditivity와 coherent를 만족하는 새롭게 정의된 ES(expected shortfall)를 계산하는 것으로 꼬리조건부기대(tail conditional expectation, TCE)에서 유도된다. 이 경우 ES는 정확히 100 α%에 대한 최악의 경우(worst case)를 나타내나 TCE는 100α%이상을 포함하게 된다.

ES는 subadditivity를 만족시키는 coherent 위험측정방법으로서 유일한 전체최소손실점(global minima)을 가지므로 항상 어떤 local minima가 없는 convex 위험표면을 갖는 반면에 VaR는 non-coherent 위험측정방법으로 복수의 local minima가 존재하는 일반적인 위험표면으로 나타내고 있다. 그러나 이러한 VaR의 non-coherent문제는 표본의 수를 충분히 늘리게 되면 확률분포함수가 정규분포를 나타내게 되므로 VaR coherent가 될 수 있다. 그러나 이때도 여전히 convexity의 문제는 남게되고 복수의 local minima가 존재한다.

n개의 coherent 측정값이 주어졌을 때 가장 일반적인 convex 조합은 산출된 볼록성표면(convex hull)에 있는 어느 한 점이다. 이 때 위험에 대한 coherent 측정치는 무한대로 많다. 즉, 0과 1사이의 어떤 값 α에 대해 모든 가능한 α-ES를 말한다. 이 같은 방법에 의해서 새로 분류된 coherent 측정치들이 산출될 수 있으며 이 분류는 스펙트럴 위험측정(spectral measures of risk)으로 정의된다. 따라서 convex hull은 위험에 대한 새로운 coherent 측정치들이다. 한편 스펙트럼(spectrum) ϕ(p)를 갖는 스펙트럴 위험측정에 대한 정의는 다음 (식 6)과 같다.

$$M_{\phi}(X) = -\int_0^1 \phi(p) F_{\alpha}^{\leftarrow}(p)\,dp \qquad \text{(식 6)}$$

[정리]: $M_{\phi}(X)$의 측정은 다음과 같은 조건들을 만족할 때만 coherent이다.

(i) ϕ(p)는 양(+)이다. (ii) ϕ(p)는 증가하지 않는다. (iii) $\int_0^1 \phi(p)dp = 1$이다.

여기서 ϕ(p)는 위험회피함수(risk aversion function)로 볼 수 있다. 위험에 대한 측정에서 관측된 시계열 자료에 대해 최악의 경우(worst case)에 더 큰 가중치를 부여할 때만 coherent가 성립한다. 따라서 위험회피함수 ϕ(p)는 최악의 경우(worst case)와 최선의 경우(best case) 모두에 대해 가중하는 함수로서 고려될 수 있다.

ES와 VaR에 대한 위험회피함수 ϕ(p)의 차이는 두 방법 모두 양(+)이며 위 [정리](iii)의

조건을 만족하고 있으나 ES는 감소하는 계단함수(step function)이고 VaR는 감소하지 않는 스파이크 함수(spike function)이다. 추정된 ES는 역사적 분포 VaR와 같다.

본 연구에서는 VaR제약에 의한 포트폴리오의 최적자산배분에서 공리(axiom)-특히 subadditivity와 coherent 그리고 convexity 공리 등-을 위배하지 않도록 직접적으로 위험회피도(risk aversion)를 고려하는 모형을 설명한다.

Ⅳ. VaR제약 하의 최적자산배분

앞서 설명한 바와 같이 최적자산배분 시 위험회피도를 고려할 때 subadditivity와 coherent 그리고 convexity의 조건을 만족시킨다는 것을 알 수 있다. 따라서 위험최소화에 따른 분산-공분산 행렬식과 라그랑지안 함수를 이용하여 위험회피도를 구하고 여러 가지 자산배분 점을 산출한다. 이렇게 산출된 자산배분의 무수한 조합으로부터 포트폴리오 수익률과 포트폴리오 VaR를 구한 다음 Sharpe의 위험조정수익률에 적용함으로써 기대수익을 극대화하는 최적자산배분점을 발견한다.

위험최소화모형은 subadditivity와 concave한 VaR-Frontier를 만족시키면서 포트폴리오의 위험을 최소화하는 자산배분비율을 발견하는 방법이고 기대수익극대화모형은 위험최소화모형에 의해 산출된 자산배분비율의 함수로 나타나는 포트폴리오의 수익률과 위험(여기서는 무위험이자율 r_f에서 VaR_p를 차감한 값)으로 나누어 준 위험조정 포트폴리오의 수익률을 극대화하는 최적자산배분점이다.

금융기관에서 주로사용하고 있는 포트폴리오 구성자산인 채권, 주식, 그리고 환율 등의 수익률에 대한 가정은 다음과 같다. (ⅰ) 로그노말 랜덤워크(lognormal random walks) 확률분포를 따른다. (ⅱ) 위험회피적 등탄력성(risk-averse iso-elastic)의 효용함수를 가진다. (iii) 투자기간 내 자산구성이 변동하지 않는다. (iv) 투자종료시점의 기대효용을 극대화한다.

1. 위험최소화 모형과 상대적 위험회피도에 의한 최적자산배분

가. Merton의 최적자산배분을 이용한 포트폴리오 최적화

Merton(1972)은 위험자산의 최적조합을 위한 투자가중치를 유도하는 식을 이용하여 무위험자산을 도입한 자본시장선(capital market line, CML)과 효율적 프론티어의 접점 포트폴리오인 위험자산의 최적조합비율을 제시하고 있다.

포트폴리오의 최적자산배분은 라그랑지함수의 1계조건(first order condition)을 만족시키는 과정을 풀면 위험이 최소화된 효율적 포트폴리오 투자자산 구성비가 도출된다.

$$L = w'\Omega w + \delta_1(\mu_p - w'\mu) + \delta_2(1 - w'i) \qquad \text{(식 7)}$$

여기서 i는 1로 구성된 벡터, δ_1과 δ_2는 라그랑지 승수이다. w에 대해 0의 해를 갖는 것으로 놓고 L을 미분하면 다음 (식 8)로 나타낼 수 있다.

1계조건: $2\Omega w - \delta_1\mu - \delta_2 i = 0$ (식 8)

(식 7)과 (식 8)를 풀면 포트폴리오의 최적자산배분비율의 추정치인 $\widehat{\omega}$은 다음 (식 9)에 의해서 도출된다.

$$\widehat{w}_p = d + F\mu_p \qquad \text{(식 9)}$$

$$F = \frac{1}{\delta}[C(\Omega_\mu^{-1}) - A(\Omega_i^{-1})] \qquad \text{(식 10)}$$

$$d = \frac{1}{\delta}[B(\Omega_i^{-1}) - A(\Omega_\mu^{-1})] \qquad \text{(식 11)}$$

$$A = i\Omega^{-1}\mu \qquad B = \mu'\Omega^{-1}\mu$$

$$C = i'\Omega^{-1}i \qquad \delta = BC - A^2$$

위의 $\widehat{\omega}_p$=d+$F\mu_p$식에서 최적자산배분비율 $\widehat{\omega}$은 포트폴리오 수익률인 μ_p와 F의 함수로 나타난다. 따라서 μ_p에 대한 각각의 효율적 자산배분비율인 $\widehat{\omega}$가 계산되고 포트폴리오 VaR를 구할 수 있다.

효율적 집합으로부터 산출된 값은 최소분산(minimum variance) 포트폴리오의 투자가중치

를 산출한다. 포트폴리오 d를 GMVP(global minimum variance portfolio)로 정의하자. 따라서 포트폴리오 d에 대해 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$w_d = \frac{1}{C}\Omega^{-1}i, \ \ \mu_d = \frac{A}{C}, \ \ \sigma_d^2 = \frac{1}{C} \qquad \text{(식 12)}$$

이제 N개의 위험자산(risky assets)과 무위험자산(risk free asset)으로 구성된 포트폴리오를 이용하여 최적자산배분을 유도하면 다음과 같다. 무위험 자산을 갖는 위험자산의 포트폴리오 가중치는 그 합이 1로 제약되지 않는다. 왜냐하면 $(1-w'i)$가 무위험 자산에 투자될 수 있기 때문이다.

기대수익률 μ_p를 갖는 MVP와 무위험 수익률 R_f를 갖는 무위험 자산이 주어졌을 때 제약된 최적화(constrained optimization)에 대한 해를 도출한다.

$$\min w'\Omega w \qquad \text{(식 13)}$$

다음의 식을 조건으로 한다.

$$w'\mu + (1-w'i)R_f = \mu_p \qquad \text{(식 14)}$$

라그랑지안 함수 L을 도입하여 w에 대해 미분하고 0의 등식을 설정한 후 w에 대해 풀면 라그랑지안 함수는 다음의 식과 같다.

$$L = w'\Omega w + \delta(\mu_p - w'\mu - (1. - w'i)R_f) \qquad \text{(식 15)}$$

w에 대해 L을 미분하고 0과 같게되는 결과를 설정하면 다음의 식과 같다.

$$2\Omega w - \delta(\mu - R_f i) = 0 \qquad \text{(식 16)}$$

(식 14)를 (식 16)에 결합하면 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$w_p = \frac{(\mu_p - R_f)}{(\mu - R_f i)'\Omega^{-1}(\mu - R_f i)}\Omega^{-1}(\mu - R_f i) \qquad \text{(식 17)}$$

나. VaR 제약 하에서 상대적 위험회피도를 이용한 최적화

VaR 제약 하에서 위에서 설명한 Merton의 방법, 라그랑지안 함수, 그리고 위험회피도를 이용한 자산배분은 포트폴리오 VaR를 최소화 한다. 어떤 자산의 확률변수가 랜덤워크 과정을 따른다고 가정하면 위험최소화 모형에서 위험배분(risk allocation)식을 설명하기 위해 투자자에 대한 가정에서 상대적 위험회피도계수 A와 등탄력적 효용함수(iso-elastic utility function)를 가지고 효용극대화를 추구하는 투자자를 가정한다. 투자자의 포트폴리오가 투자기간 및 투자금액에 대해 일정하고 상대적 위험회피도의 특성을 갖는 등 탄력적 효용을 가정하고 있으므로 투자기간과 최초 투자금액과는 무관하다.

공매도를 허용하는 레버리지(leverage)를 나타내는 비제약(unconstrained) 최적자산배분을 고려하는 전통적인 포트폴리오 이론 중 효용극대화식을 구하기 위해 n개의 자산으로 구성된 포트폴리오에 대한 최적자산배분을 위해 포트폴리오의 지속적인 조정(rebalancing)을 가정한 포트폴리오의 표준편차와 분산을 이용한 포트폴리오 수익의 극대화는 다음 (식 18)과 같이 F(w)를 최대화하는 것이다.

$$
\begin{aligned}
F(w) &= \alpha_p - \frac{1}{2} A\sigma_p^2 \\
&= w'x - \frac{1}{2} Aw'\Sigma w \\
&= \sum_{i=1}^{n} w_i \alpha_i - \frac{1}{2} A \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}
\end{aligned}
\qquad (식\ 18)
$$

여기서 $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$

F(w)를 계산하기 위해 라그랑지 승수 λ와 새로운 목적함수 $\mathcal{F}$를 결합하면 다음 (식 19)와 같이 나타낼 수 있다.

$$
\begin{aligned}
F(w, \lambda) &= F(w) + \lambda(1 - \sum_{i=1}^{n} w_i) \\
&= w'x - \frac{1}{2} Aw' Vw + \lambda\left(1 - \sum_{i=1}^{n} w_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} w_i \alpha_i - \frac{1}{2} A \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} + \lambda\left(1 - \sum_{i=1}^{n} w_i\right)
\end{aligned}
\qquad (식\ 19)
$$

(식 19)는 F(w, λ)를 극대화하는 것이다. 이제 제약된 예산 하에서 라그랑지 함수를 풀면 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_{i,j}\omega_j + \frac{\lambda}{A} = \frac{\alpha_i}{A} \qquad (\text{단 } 1 \le i \le n) \qquad (\text{식 } 20)$$

여기서 $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$

위 식을 벡터와 행렬로 표시하면 다음과 같다.

$$\widehat{V} = \begin{pmatrix} \sigma_{1,1} & \cdots & .. & \sigma_{1,n} & 1 \\ . & & & .. & . \\ . & & & .. & . \\ \sigma_{n,1} & . & .. & \sigma_{n,n} & 1 \\ 1 & .. & .. & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \widehat{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ . \\ . \\ w_n \\ \lambda \div A \end{pmatrix} \qquad (\text{식 } 21)$$

$$\widehat{x} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ . \\ . \\ \alpha_n \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \widehat{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\text{식 } 22)$$

이를 이용하여 $\widehat{V} \times \widehat{W}$, $\widehat{c}$과 $\widehat{d}$를 계산하면 다음 (식 23)~(식 25)와 같다.

$$\widehat{V} \times \widehat{W} = \frac{1}{A}\widehat{x} + \widehat{y} \qquad (\text{식 } 23)$$

$$\widehat{c} = \widehat{V}^{-1}\widehat{x} \qquad (\text{식 } 24)$$

$$\widehat{d} = \widehat{V}^{-1}\widehat{y} \qquad (\text{식 } 25)$$

위 식에서 구한 해(solution)를 이용하여 일정한 위험회피도 하에서 최적자산 배분을 구한다. 그 식은 다음 (식 26)과 같다.

$$w_i = \frac{1}{A} c_i + d_i \qquad (\text{식 } 26)$$

(식 26)에서 최초의 자산배분비율은 A에 무한대(∞)의 위험회피도를 대입한 것으로 그 해는

$w_i = d_i$이고 이 시점의 포트폴리오는 최소분산(minimum variance)을 갖는다. 이로부터 주어진 위험회피도에 따른 최적자산배분을 구한다. 한편 Asset-Normal과 Delta-Normal의 차이점은 전자는 w_i를 사용하고 후자는 현금흐름(즉 각 자산의 기대수익률)을 사용하는 것이다. 따라서 특정 신뢰수준에 대한 VaR 제약 하에서의 최적자산배분에 대한 식은 다음 (식 27)과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$w_{i|VaR} = \left[\frac{1}{A}\hat{V}^{-1}\hat{x}_{i|VaR}\right] + \hat{V}^{-1}\hat{y}$$

$$= \frac{1}{A}\begin{pmatrix} \sigma_{1,1} & \cdots & .. & \sigma_{1,n} & 1 \\ \cdot & & & .. & \cdot \\ \cdot & & & .. & \cdot \\ \sigma_{n,1} & . & .. & \sigma_{n,n} & 1 \\ 1 & .. & .. & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{1,1} & \cdots & .. & \sigma_{1,n} & 1 \\ \cdot & & & .. & \cdot \\ \cdot & & & .. & \cdot \\ \sigma_{n,1} & . & .. & \sigma_{n,n} & 1 \\ 1 & .. & .. & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(식 27)}$$

$$\text{subject to:} \quad \alpha_i = \left(\frac{1}{(k-1)}\sum_{i=1}^{k-1} x_i + \frac{1}{(n-k)}\sum_{k=1}^{n} VaR_{x_k}(c, p)\right)$$

여기서 $VaR_{x_k}(c, p)$는 실제분포 하에서 특정신뢰수준(c)에 대하여 주어진 퍼센타일(p)이다. 즉 95%의 신뢰수준 하에서 VaR한도는 VaR(c, p)로 제약된다는 것을 알 수 있다. 이렇게 산출된 자산배분에 의한 VaR는 subadditivity하고 coherent하며, VaR-Frontier는 concave하다.

Campbell et al(2001)의 연구에 의하면 투자자들의 위험회피도(degree of risk aversion)가 신뢰수준에 따른 VaR에 의하여 결정된다고 보고 기대효용이론을 적용하지 않고도 특정 신뢰수준의 선택된 VaR값을 위험회피성향으로 보았다. 따라서 VaR가 특정 신뢰수준의 위험을 나타낸다고 볼 경우 모든 시장참가자들이 주어진 동일한 위험수준(즉 특정 신뢰수준)의 상황 하에서 위험수용(risk tolerance)정도가 서로 다를 수 있다는 가정 하에서 상대적 위험회피도를 계산하여 줌으로써 다수의 효율적 포트폴리오 조합을 구성하는 것이 가능하다.

위험 하에서 기대수익률을 최대로 하는 포트폴리오 수익은 다음 (식 28)과 같이 위험－수익 비율(이하 S(p)라 한다)을 극대화함으로써 가능하다.

$$\text{Max S(p)} = \frac{R_p - r_f}{W(0)\, r_f - W(0)\, q(c, p)} \qquad \text{(식 28)}$$

이 경우 S(p)는 포트폴리오의 기대수익률에서 무위험이자율을 차감한 리스크 프레미엄을 상대적 VaR(즉, 무위험이자율을 평균기대수익률로 보고 이 값에서 특정 신뢰수준의 VaR한도액을 차감한 값)로 나누어 구한 기울기 값이다. S(p)의 분모는 투자자의 잠재적 손실에 대한 벤치마킹 수익률로 무위험이자율에 초점을 맞춘 투자자자 행태를 나타낸 것으로 Arzac & Bawa (1977)의 모형에 손실제약(shortfall constrained)을 적합시킨 모형이다. 실제로 위험측정은 가능한 손실의 측정으로 간주되므로 투자 시 위험자산에 대한 잠재적인 기회손실을 측정한다. 따라서 투자자들은 위험자산으로부터 발생하는 손실을 허용할 수 있다면 더욱 큰 수익을 받아들인다. 따라서 S(p)는 적정포트폴리오 p′를 최대화하는 것이고 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$p': Max\,S(p) = \frac{R_p - r_f}{\phi(c,\,p)} \qquad (식\ 29)$$

여기서 $\phi(c,\,p) = W(0)r_f - VaR(c,\,p)$이다. 따라서 최초의 투자금액 W(0)가 (식 28)의 분모에 포함되어 있으나 이는 최적 포트폴리오 선택에 영향을 미치지 않는 상수이고 자산배분과정은 W(0)와 무관하다. (식 29)를 변형하면 리스크－수익비율을 최대화하는 식은 다음과 같다.

$$Max\,S(p) = \frac{R_p - r_f}{W(0)r_f - VaR(c,\,p)} \qquad (식\ 30)$$

상기 조건식 S(p)는 포트폴리오의 성과측정에 주로 사용되는 Sharpe비율과 동일한 성과측정지수이다. 포트폴리오의 기대수익이 정규분포라는 가정과 무위험 수익률을 0으로 가정한다면 S(p)는 Sharpe비율과 동일하다. 이 같은 경우에 VaR는 기대수익률의 표준편차의 배수로 표시되기 때문에 성과측정지수가 최대화되는 점에서 최적포트폴리오가 이루어진다. 단지 적정 포트폴리오와의 최소한의 차이점은 양(+)의 무위험이자율과 짧은 투자기간에 대하여 존재한다. S(p)를 최대화하는 적정포트폴리오는 초기의 부와 위험의 최대한도로 제약된 포트폴리오 VaR(c, p)와 무관하게 이루어진다. 왜냐하면 다양한 포트폴리오 구성에 대하여 리스크 측정지수인 $\phi(c,\,p)$는 목표 VaR(desired VaR)보다 추정된(estimated) 포트폴리오 VaR에 의해서 좌우된다.

V. 결 론

금융기관은 VaR를 산출하고 이를 제약한 최적자산배분을 수행한다. 그러나 현실적으로 은행이나 우체국금융에서는 ALM에 의한 유동성 리스크 관리와 더불어 금리 리스크 관리에 더 많은 관심을 갖고 있으며 이에 의한 자산배분이 이루어지고 있다. 만일 금융기관에서 자료관리 시스템이 잘 구축되어있다면 먼저 투자하려는 자산을 분류하고 이들 자산에 대해 bucket별 최적자산배분의 수행이 가능하다.

현재 우체국금융의 투자자산은 다음 〈표 1〉과 같이 확정금리상품과 실적상품으로 나눌 수 있다. 확정금리상품은 공자기금, 국공채, 정기예금 등으로 금리관련 상품이며, 실적상품은 특정금전신탁, 그리고 수익증권과 MMF로 구분된다.

〈표 1〉 우체국 금융 자금운용 현황(2004년 5월말 현재)

(단위: 억원)

구 분	예금자금		보험적립금		합계	
	금액	비중	금액	비중	금액	비중
공공성 자금지원	**138,140**	**0.374**	**78,092**	**0.398**	**216,232**	**0.382**
① 공공자금관리기금예탁	95,994	0.26	19,189	0.098	115,183	0.204
② 국공채 매입	35,546	0.096	56,916	0.29	92,462	0.164
③ 지방청 위탁	6,600	0.018	1,987	0.01	8,587	0.015
금융기관 예탁	**213,072**	**0.577**	**107,264**	**0.546**	**320,336**	**0.567**
① 은행권 예탁	128,326	0.348	23,797	0.121	152,123	0.269
② 투신권 등(제2금융기관)	84,746	0.23	56,771	0.289	141,517	0.25
③ 회사채 매입			26,696	0.136	26,696	0.047
창구준비금 등	**17,921**	**0.049**	**10,924**	**0.056**	**28,845**	**0.051**
합계	369,133	1	196,280	1	565,413	1

우체국금융은 공자기금에 대한 제약을 두지 않을 경우 앞서 설명하였던 모형을 이용한 최적자산배분을 수행한 다음 유동성 리스크와 금리위험을 고려하여 bucket별로 포트폴리오를 구성할 수 있을 것이다. 현재 혼합형에서 운용되고 있는 우체국금융은 공자기금에 대한 제약과 주식투자비중이 시중은행이나 특수은행의 주식 투자비중에 비해 매우 낮으므로 최적자산배분과는 다

른 포트폴리오를 구성하고 있다고 볼 수 있다.

우체국금융은 VaR를 제약한 최적자산배분이라기 보다는 ALM하에서 자산배분에 충실한 포트폴리오관리로 볼 수 있다.

본 연구에서 제시하고 있는 VaR제약 하에서 최적자산배분모형은 우체국금융이 자산운용에 대한 제약조건이 없을 때 이 최적자산배분모형을 이용하여 기대수익을 극대화할 수 있으며 bucket별로 RSA와 RSL에 대한 유동성 위험과 금리위험을 관리할 수 있다는 것을 가정하고 있다. 따라서 추후 최적자산배분이 이루어졌을 때 달성할 수 있는 수익률과 그렇지 않았을 때의 수익률에서 어떤 차이가 존재하는 지에 대한 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

김진호, "평균－분산 모형과 평균－VaR 모형간 최적위험자산배분 전략비교", 재무연구 제15권 2호, 2002

박재석, "VaR를 이용한 최적위험자산배분에 관한 연구", 경희대학교 대학원(경영학과 박사논문), 2003. 8

이건호, VaR의 이해와 국내금융기관의 VaR시스템 구축방안, 한국금융연구원, 1999, pp.44～45.

이준행, "VaR 측정치의 Backtest와 VaR모형의 적정성 평가", 선물연구 제8권, 2000

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M. Heath D. *Coherent Measures of Risk*, Mathematical Finance, 9 (1999), 203-228.

Arzac, E. and R. Bawa, V. S., "Portfolio Choice and Equilibrium in Capital Markets with Safety-first Investors", *Journal of Financial Economics*, 4, 1977, pp.277～288

Bensalah, Y., "Asset Allocation Using Extreme Value Theory", Bank of Canada, *Working Paper* 2002-2, 2002

Boudoukh, J., M. Richardson and R. Whitelaw, 1997, "Investigation of a Class of Volatility Estimators", *Journal of Derivatives* 4, 63-71.

Campbell, R., R. Huisman, and K. Koedijk, "Optimal Portfolio Selection in a Value-at-

Risk Framework", *The Journal of Banking & Finance*, No 25, 2001, pp.1789~1804

Clarke, R. G., H. Silva, and B. Wander, "Risk Allocation versus Asset Allocation", *Journal of Portfolio Management*, Vol.29, Iss.1, 2002, pp.9~22

Huisman, R., K. Koedijk, and A. J. R. Pownall, "Asset Allocation in a Value at Risk Framework." Erasmus University, Rotterdam, Faculty of Business Administration, 1999

Longin, F., "From Value at Risk to Stress Testing: The Extreme Value Approach", *The Journal of Banking and Finance*, 24, 2000, pp.1097~1130

Lucas, A. & P. Klassen, "Extreme Returns, Downside Risk, and Optimal Asset Allocation", *Journal of Portfolio Management*, Vol. 25, No 1, 1998

Mausser, H. & D. Rosen, "Beyond VaR : From Measuring Risk to Managing Risk", *Algo Research Quarterly*, Vol. 1, No2., 1998. 12

Nelson, D., and D. Foster, 1996, "Asymptotic Filtering Theory for Univariate ARCH Models", *Econometrica* 62, 1-41.

Smithson, C., "Risk Allocation", *Risk*, Vol. 14 No 2, 2001, pp.58~59